

فصل دوم: میدان الکتریکی

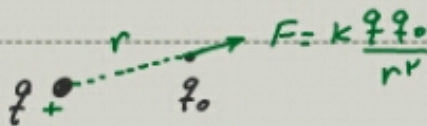
هائیکه در فصل اول بحث شده شد، بارهای الکتریکی بر یکدیگر نیرو وارد می کنند و این نیرو برای بارهای نقطه ای، از قانون کولن محاسبه شد. اگر توزیع بارها پیوسته باشند و هدف، محاسبه نیروی بین آنها باشد، با توجه به اینکه هر توزیع پیوسته را می توان با المان گیری به نهایت نقطه تقسیم کرد، باید نیروی بین نقاط محاسبه و با اصل برهم نهی، نیروی کل بدست آید. این امر منجر به اشتغال های نسبتاً پیچیده می شود که چون دو توزیع بار اشتغال گیری می شود، از نظر ریاضی با پیچیدگی زیادی مواجه می شویم.



$$dF = k \frac{dq_1 dq_2}{r^2}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

برای گریز از محاسبات وابسته به دو بار یا دو توزیع بار، گیتی را معرفی می کنند که با یک بار یا یک توزیع بار درگیر باشد. این گیتی، میدان الکتریکی است. برای بار نقطه ای q ، اگر بار q (بار آزمون) را در فاصله r از q قرار دهیم، نیروی $F = k \frac{qq_0}{r^2}$ بر q وارد می شود. از آنجا که نیرو با فاصله رابطه عکس مجذوری دارد، چنانچه r را افزایش دهیم، F به سرعت کاهش می یابد. در یک فاصله بحرانی (r_c) نیرو به حدی کوچک می شود که عملاً می گیریم $F=0$.



بنابراین فضای اطراف q وجود دارد که در آن به ازای

$r < r_c$ نیرو وجود دارد و به ازای $r > r_c$ نیرو صفر است.

به فضای اطراف هر بار یا هر توزیع بار که در آن فضا، نیروی الکتریکی اثر دارد، میدان الکتریکی گفته می شود. **تعریف رابعد این فضا تابع شکل و اندازه توزیع بار است.** هدف ما تعیین شکل این فضا نیست، بلکه هدف تعیین شدت میدان الکتریکی ($\vec{E}$) است و معمولاً هنگام بیان عملاً، بجای شدت میدان، از لفظ میدان استفاده می کنیم.

تعریف شدت میدان الکتریکی ($\vec{E}$): بنا به تعریف، میدان الکتریکی برابری با نیروی الکتریکی به ازای واحد بار مثبت.

در رابطه مقابل، q بار مولد میدان است.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$

با توجه به رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ ، متوجه می شویم که میدان یک گیتی برداری است که برای بار نقطه ای، مقدار آن $E = \frac{kq}{r^2}$

و جهت آن در هر نقطه با جهت نیروی وارد بر بار آزمون یکی است. از آنجا که بار آزمون مثبت است، جهت میدان به علامت بار

مولد q بستنی دارد. اگر $q > 0$ ، میدان از بار دور می شود و اگر $q < 0$ ، میدان به بار نزدیک می گردد.



خطوط میدان (خطوط نیرو): با جای کردن بار آزمون، اطراف هر بار یا هر توزیع بار و رسم نیروی وارد بر بار آزمون، مجموعه خطی ایجاد می شود که به خطوط نیرو (میدان) موسوم است. این خطوط دارای ویژگی های زیر هستند:

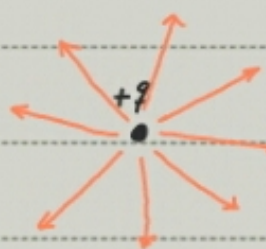
۱. خطوط نیرو هرگز یکدیگر را قطع نمی کنند.

۲. تراکم خطوط نشان دهنده شدت میدان است.

۳. ماس بر خط نیرو در هر نقطه، راستای میدان را مشخص می کند.

استفاده از خطوط نیرو برای درک بهتر پدیده های الکتروستاتیکی مفید است و یک روش کیفی برای توضیح نتایج است و برای حل مسائل به صورت کمی، کاربرد ندارد.

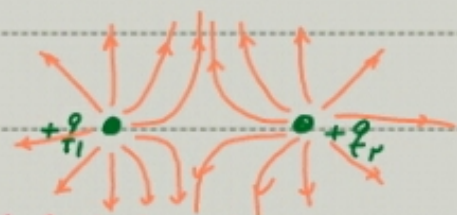
مثال ۱. خطوط نیروی وابسته به توزیع بار در زیرارسم کنید.



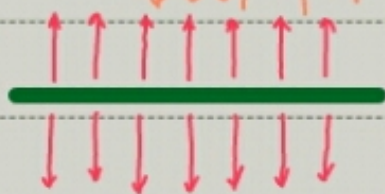
الف. بار نقطه ای $+q$: (خطوط، شعاع های کره اند، میدان تقارن کروی دارد)



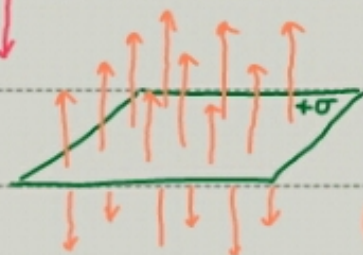
ب. بار نقطه ای $-q$: (خطوط به سمت بار)



ج. دو بار نقطه ای مثبت به فاصله معین از یکدیگر:

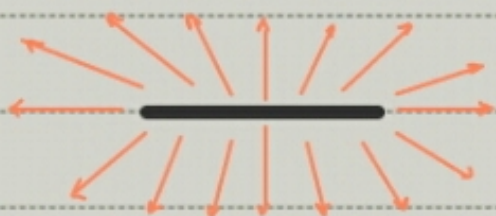


د. خط بار مستقیم نامتناهی با چگالی $+λ$: (خطوط، شعاع های استوانه اند، میدان تقارن استوانه ای دارد).



ه. صفحه مسطح نامتناهی با چگالی $+σ$:

(خطوط عمود بر صفحه و موازی یکدیگرند، میدان یکنواخت است)



و. خط بار مستقیم و متناهی به طول L با چگالی $+λ$:

محاسبه میدان: الف. توزیع بار نقطه ای: برای یک توزیع بار نقطه ای، میدان در یک نقطه از فضا بر اساس اصل برهم انباشت،

برابر است با برداشت میدان هر یک از بارهای توزیع، در نقطه مورد نظر.

برای محاسبه کمیت میدان هر یک از بارها، در نقطه مورد نظر رسم می کنیم محوره و در یک دستگاه مختصات، برآیند آنها را محاسبه نمود.

مثال ۲- در توزیع بار زیر، میدان الکتریکی را در نقطه A بدست آورید.

$$E_1 = K \frac{(4q)}{2a^2} \rightarrow \begin{cases} E_{1x} = E_1 \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 \\ E_{1y} = E_1 \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{2x} = E_2 \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} E_2 \\ E_{2y} = E_2 \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} E_2 \end{cases}$$

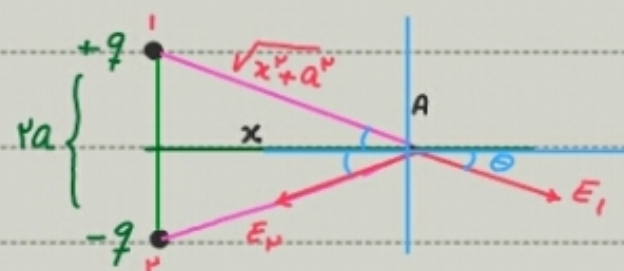
$$E_2 = K \frac{(4q)}{5a^2}$$

$$E_3 = K \frac{q}{(2a)^2} = 2K \frac{q}{a^2}$$

$$\vec{E}_A = (\sum E_x) \hat{i} + (\sum E_y) \hat{j} = (E_2 + E_{2x} - E_{1x}) \hat{i} + (E_{1y} - E_{2y}) \hat{j}$$

$$\vec{E}_A = 2K \frac{q}{a^2} \left\{ \left(1 + \frac{4}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hat{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \hat{j} \right\}$$

مثال ۳- دو قطبی الکتریکی: دو بار نقطه‌ای با دین و مخالف ($+q$ و $-q$) که به فاصله ثابتی ($2a$) از یکدیگر قرار گرفته‌اند. دو قطبی الکتریکی ناهمگام. میدان الکتریکی روی محور متوسط دو قطبی و به فاصله x از مرکز آن حساب کنید.



$$E_1 = K \frac{q}{r^2} = \frac{Kq}{(x^2 + a^2)} = E_2$$

$$E_{1x} = E_1 \cos \theta = E_2 x, \quad E_{1y} = E_1 \sin \theta = E_2 y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\vec{E}_A = (\underbrace{E_{1x} - E_{2x}}_0) \hat{i} + (E_{1y} + E_{2y}) (-\hat{j}) = -2E_2 y \hat{j} = -2E_1 \sin \theta \hat{j} = -2 \frac{Kq}{(x^2 + a^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \hat{j}$$

$$\vec{E}_A = - \frac{K(2aq)}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}$$

کمیت $2aq$ را گشتاور دو قطبی الکتریکی می‌گویند و آن را با P نشان می‌دهند.

$$P = 2aq \rightarrow \vec{E}_A = -K \frac{P}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}$$

برای حالت‌های خاص:

- در مرکز دو قطبی: ($x=0$) $\vec{E} = - \frac{KP}{a^3} \hat{j} = -2K \frac{q}{a^2} \hat{j}$

- در نقاط دور از مرکز: ($x \gg a$) $\vec{E} = -K \frac{P}{x^3} \hat{j}$

همانگونه که مشاهده می‌شود، میدان ناهمگام از یک دو قطبی الکتریکی در نقاط دور از آن به صورت عکس متغیر فاصله تغییر می‌کند. و رفتار آن با بار نقطه‌ای متفاوت است.

۱. می‌توان میدان توزیع بار پیوسته: برای محاسبه میدان یک توزیع بار پیوسته، باید مراحل زیر را انجام داد:

۱. انتخاب المان بار dq (توزیع خطی λdl ، توزیع سطحی σds و توزیع حجمی ρdv).

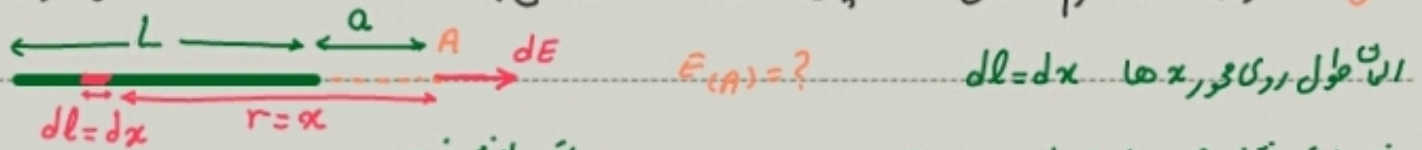
۲. تعیین فاصله r تا نقطه مورد نظر (r) . همیشه نقطه مورد نظر که می‌خواهیم میدان را در آن حساب کنیم بعنوان مبدأ گرفته شود.

۳. رسم و محاسبه $d\vec{E}$ در نقطه مورد نظر.

۴. در صورت لزوم تجزیه $d\vec{E}$ به مولفه x و y در دستگاه مختصات مناسب.

۵. انستگراسی از مولفه‌های $d\vec{E}$ روی ناحیه‌ای که بار توزیع شده است.

مثال ۴- میدان خط بار مستقیم به طول L با چگالی λ را در نقطه‌ای واقع بر امتداد خط و به فاصله a از یک سر آن حساب کنید.



فاصله تا نقطه A (مبدأ) برابر $r = x$

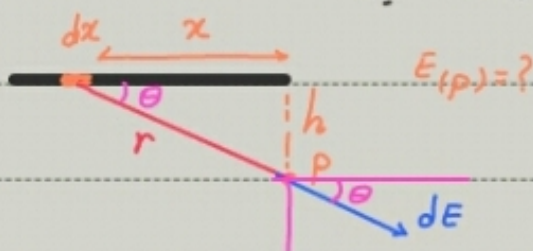
$$dE = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\lambda dx}{x^2}$$

تجزیه کنیم، ثابت

$$E = \int dE = \int_a^{L+a} k \lambda \frac{dx}{x^2} = k \lambda \left(-\frac{1}{x} \right)_a^{L+a}$$

$$E = k \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} \right)$$

مثال ۵- میدان خط بار قبل از نقطه‌ای به فاصله عمودی h از یک سر آن حساب کنید.



$$dE = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\lambda dx}{(x^2 + h^2)}$$

$d\vec{E}$ باید تجزیه شود.

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{k \lambda dx}{(x^2 + h^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = k \lambda \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

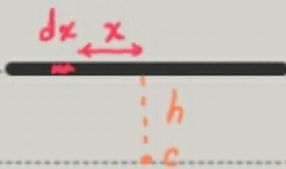
$$dE_y = dE \sin \theta = \frac{k \lambda dx}{(x^2 + h^2)} \cdot \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{k \lambda h dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

با انستگراسی از مولفه‌های $d\vec{E}$ روی محدوده توزیع بار:

$$E_x = k \lambda \int_0^L \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = k \lambda \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right)_0^L = k \lambda \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + h^2}} \right)$$

$$E_y = k \lambda h \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = k \lambda h \left(\frac{x}{h^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \right)_0^L = k \lambda \frac{L}{h \sqrt{L^2 + h^2}}$$

مثال ۶- میدان خط بار قبل از روی عمود منصف خط به فاصله h از آن حساب کنید.



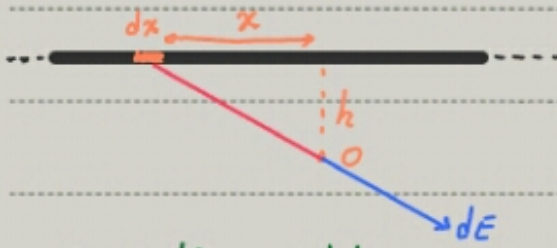
باقی وقت، م‌شاهده می‌شود که هر مراحل م‌به مثال قبل
است، فقط با انتقال نقطه مورد نظر (P به C) م‌بداء تغییر کرده و محدوده انتگرال

عوض می‌شود. اینجا، م‌بداء در نقطه C است. وسط خط بار $x=0$ است.
بالوجه به تقارن موجود، مولفه ای افقی میدان، م‌یگردد ارضی کرده است.

$$E_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dE_x = 0$$

$$E_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dE_y = k\lambda h \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = k\lambda h \left(\frac{x}{h^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \right)_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = k\lambda \frac{L}{h \sqrt{\frac{L^2}{4} + h^2}}$$

سوال ۷- میدان خط بار مستقیم نامتناهی با چگالی λ را در نقطه ای به فاصله h از خط بار است آورید.



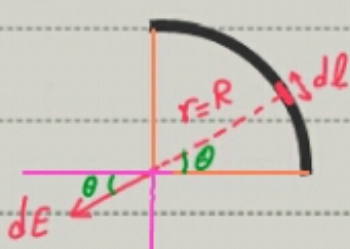
مراحل با مثال دیو ۶ یکی است، فقط چون خط
نامتناهی است، محدوده انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ است.

$$dE = k \frac{dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{(x^2 + h^2)} \rightarrow dE_x = dE \cos \theta, \quad dE_y = dE \sin \theta$$

به دلیل تقارن، مولفه ای x میدان خنثی می‌شوند، $E_x = 0$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_y = k\lambda h \left(\frac{x}{h^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \right)_{-\infty}^{+\infty} = \frac{k\lambda}{h} (2) \rightarrow E_y = \frac{2k\lambda}{h}$$

سوال ۸- میدان خط بار به شکل ربع دایره به شعاع R با چگالی λ را در مرکز ربع دایره حساب کنید.



$$dE = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\lambda dl}{R^2}$$

چون با چگالی λ است، جهت

dE تغییر می‌کند، باید تغییر می‌شود.

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{k\lambda}{R^2} dl \cos \theta = \frac{k\lambda}{R} \cos \theta d\theta$$

dl یعنی کوید از دایره به شعاع R

$$dE_y = dE \sin \theta = \frac{k\lambda}{R^2} dl \sin \theta = \frac{k\lambda}{R} \sin \theta d\theta$$

در مقابل زاویه مرکزی کوید $d\theta$ است.

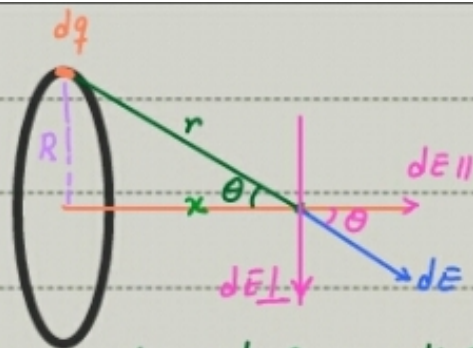
$$E_x = \frac{k\lambda}{R} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{k\lambda}{R} (\sin \theta)_{0}^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R}$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{R} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{k\lambda}{R} (-\cos \theta)_{0}^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R}$$

$\rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda}{R} (-\hat{i} - \hat{j})$

سوال ۹- میدان حلقه بار به شعاع R و بار کل Q را روی محور حلقه و به فاصله x از مرکز آن حساب کنید.

چون شکل به بدی خواهد شد، برای سادگی ترسیم، حلقه را عمود بر صفحه گرفته و محور آن در صفحه واقع می‌شود.



$$dE = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{dq}{x^2 + R^2}$$

با تغییر مکان dq جهت dE تغییر می کند، پس $\vec{E}$ کمترین می شود.

$$dE_{\perp} = dE \sin \theta \rightarrow E_{\perp} = 0$$

به دلیل تقارن

$$dE_{\parallel} = dE \cos \theta = k \frac{dq}{(x^2 + R^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{k x dq}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$E_{\parallel} = \int dE_{\parallel} = \frac{k x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dq = \frac{k q x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

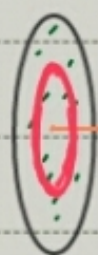
حالتها خاص :
۱- در مرکز حلقه $x=0$ $E=0$

$$E_{\parallel} = \frac{k q x}{x^3} = \frac{k q}{x^2}$$

۲- برای نقاط دور از حلقه $x \gg R$

یعنی اگر از حلقه بار دور شویم، میدان آن مانند میدان بار نقطه ای رفتار می کند.

مثال ۱۰- میدان صفحه دایره ای (قرص) به شعاع R با چگالی بار σ را روی محور قرص به فاصله x از مرکز حساب کنید.



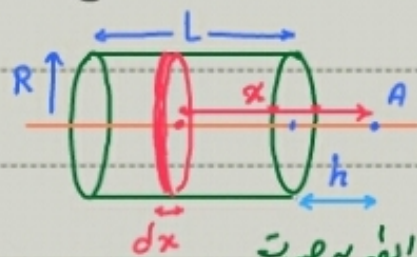
این سطح ds را به صورت یک خط در نظر می گیریم، مناسب ترین خط، یک حلقه به شعاع y و پهنای dy است. از میدان حلقه (مثال ۹) استفاده می کنیم.

$$dE = \frac{k dq x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dq = \sigma ds = \sigma 2\pi y dy \rightarrow dE = \frac{k \sigma 2\pi y dy x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow dE = \frac{\sigma x y dy}{2\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}_0^R = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

مثال ۱۱- میدان الکتریکی ناشی از یک استوانه باردار توپر به شعاع R و طول L را روی محور استوانه به فاصله h از قاعده (خارج استوانه) حساب کنید.



توزیع بار چگالی است و $dq = \rho dV$ ، dV حجم را به شکل یک صفحه

(قرص) به ضخامت dx در نظر گرفته و از میدان قرص (مثال قبل) استفاده

می کنیم.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

بین σ ، ρ رابطه به صورت

$$dE = \frac{\rho dx}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \rightarrow E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_h^{L+h} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) dx$$

$\sigma = \rho dx$ وجود دارد.

$$\rightarrow E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ x - \sqrt{x^2 + R^2} \right\}_h^{L+h} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ L - \sqrt{(L+h)^2 + R^2} + \sqrt{h^2 + R^2} \right\}$$

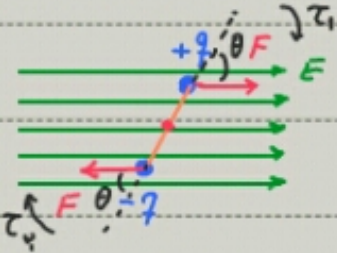
بار الکتریکی و دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی:



اگر بار نقطه‌ای q در یک میدان الکتریکی E قرار گیرد، از طرف میدان بر بار نیرو وارد می‌شود.

اگر $q > 0$ به جهت نیرو با جهت میدان یکسان است. $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

اگر $q < 0$ به جهت نیرو مخالف جهت میدان است. اگر میدان یکپارچه و بار آزاد باشد، شتاب ثابت و اگر میدان غیر یکپارچه باشد، شتاب متغیر است.



اگر یک دو قطبی با بار q و فاصله $2a$ در میدان یکپارچه واقع شود، $F = qE$

دو قطبی متعادل انشائی دارد. $\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow$

اگر شتابی نیروی $\vec{P}$ می‌دهد! $\tau_1 = a F \sin \theta = \tau_2$

$$\rightarrow \Sigma \tau = \tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1 = 2a F \sin \theta = 2aqE \sin \theta = \vec{P} E \sin \theta$$

با معرفی بردار گشتاور دو قطبی $\vec{P}$ که دایره بر محور دو قطبی از بار متق به بار مثبت است خواهیم داشت:

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$$

این انرژی گشتاوری باعث نوسان دو قطبی در میدان، حول وضع تعادل (و نه $\vec{P}$ با $\vec{E}$ موازی باشد) می‌گردد.

تغییر انرژی پتانسیل دو قطبی در اثر چرخش در میدان از رابطه زیر بدست می‌آید: $\Delta U = W = \int \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} P E \sin \theta d\theta$

اگر $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ مبدأ انرژی پتانسیل در نظر گرفته شود.

$$U = \int_{\theta_0 = \frac{\pi}{2}}^{\theta} P E \sin \theta d\theta = -P E \cos \theta \rightarrow U = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$